théorème et points de Napoléon

Table des matières

Chapitre 1

Théorème de Napoléon

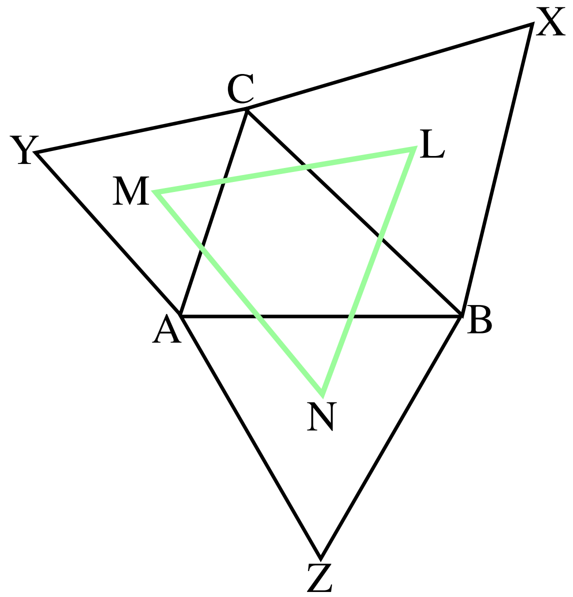


Figure du théorème de Napoléon

Le **théorème de Napoléon** est un théorème de géométrie portant sur des triangles équilatéraux construits à partir d'un triangle quelconque.

Bien qu'il soit traditionnellement attribué à Napoléon Bonaparte (d'où le nom du théorème), il n'y a pas de preuve tangible qu'il soit effectivement l'auteur du théorème. L'énoncé apparaît en effet en 1825 dans la revue The Ladies Diary[1],[2],[3],[4], soit quatre ans après la mort de l'empereur. Le nom de Napoléon attribué à ce théorème apparaît pour la première fois en 1911 dans un ouvrage mathématique italien ; l'auteur y affirme que le problème a été posé par Napoléon à Lagrange sans autre précision[5],[6].

1.1 Énoncé

Théorème de Napoléon — Si nous construisons trois triangles équilatéraux à partir des côtés d'un triangle quelconque, tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur, les centres de ces triangles équilatéraux forment eux-mêmes un triangle équilatéral.

Remarques :

- Par « extérieur », il faut par exemple entendre qu'avec les notations de notre figure et un repère orienté, les triangles *ABC* et *ABZ* sont de sens opposés (ici *ABC* est dans le sens trigonométrique et *ABZ* dans le sens anti-trigonométrique), idem pour les deux autres. Dans le cas « intérieur », ils seraient de même sens.
- Pour un triangle équilatéral, par « centre » il faut comprendre centre de gravité c'est-à-dire isobarycentre, intersection des trois médianes, confondu avec l'orthocentre ou les centres des cercles inscrit et circonscrit.

1.2 Démonstration

1.2.1 En géométrie classique

Les triangles *MCL* et *ACX* sont semblables, avec un rapport de $\sqrt{3}$. En effet, $CA/CM = \sqrt{3} = CX/CL$ et les angles $M\hat{C}L$ et $A\hat{C}X$ sont égaux. Ou dans un langage plus moderne : par la similitude directe (composée d'une homothétie et d'une rotation) de centre *C*, d'angle ±30 degrés (dans le sens approprié) et de rapport $\sqrt{3}$, les points *M* et *L* deviennent respectivement les points *A* et *X*.

D'où il résulte que la longueur du segment *AX* est égale à $\sqrt{3}$ fois celle de *ML*.

En appliquant le même raisonnement aux triangles *NBL* et *ABX*, on montre que la longueur de *AX* est aussi égale à $\sqrt{3}$ fois celle de *NL*. Ainsi, *ML* et *NL* ont même longueur.

On démontre de même – par comparaison avec *BY* – que *LM* et *NM* ont même longueur.

En conclusion : $NL = ML = NM$ et le triangle *MNL* est équilatéral.

1.2.2 Avec les nombres complexes

On notera $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ (notation usuelle) et on utilisera les notations de la figure.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct. Soient *a*, *b*, *c*, *l*, *m* et *n* les affixes respectives des points *A*, *B*, *C*, *L*, *M* et *N dans ce repère.*

Par construction, *A* est l'image de *B* par la rotation de centre *N* et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$, ce qui se traduit par :

$$(a-n)=j(b-n).$$

De même :

$$(b-l)=j(c-l) \quad \text{et} \quad (c-m)=j(a-m).$$

On en déduit :

$$(1-j)n=a-jb, \quad (1-j)l=b-jc \quad \text{et} \quad (1-j)m=c-ja.$$

Comme $\frac{1}{j}+1+j=0$ et $j^3=1$, alors :

$$\begin{aligned}(1-j)(m-n) &= (-1-j)a+jb+c \\ &= j^2a+j^4b+j^3c \\ &= -j^2[-a+(1+j)b-jc] \\ &= -j^2[(b-jc)-(a-jb)] \\ &= -j^2(1-j)(l-n)\end{aligned}$$

En divisant par (1-*j*) on obtient $(m-n)=-j^2(l-n)=e^{i\frac{\pi}{3}}(l-n)$.

Le point *M* est l'image de *L* par la rotation de centre *N* et d'angle $+\frac{\pi}{3}$ donc *NLM* est un triangle équilatéral direct.

Remarque : cette démonstration reste valable dans le cas des triangles « intérieurs » en changeant quelques signes.

1.3 Lemmes

Lemme 1 — Les centres de gravité du triangle de départ *ABC* et du triangle final *LMN* coïncident.

Ce lemme peut être facilement démontré en reprenant les notations de la démonstration avec les nombres complexes :

$$\begin{aligned}(1-j)(n+l+m)) &= a-jb+b-jc+c-ja \\ &= (1-j)(a+b+c)\end{aligned}$$

d'où l'égalité pour les affixes des barycentres $\frac{n+l+m}{3}=\frac{a+b+c}{3}$

Lemme 2 — La différence entre l'aire du triangle final « extérieur » *LMN* et l'aire du triangle final « intérieur » $L_1M_1N_1$ est égale à l'aire du triangle de départ *ABC*.

Reprenons les notations précédentes, pour le triangle « intérieur » (remarquons au passage que le point N_1 est le symétrique du point *N* par rapport au segment de droite *AB*) ; on obtient alors :

$$(1-j)n_1=b-ja$$

$$(1-j)l_1=c-jb$$

$$(1-j)m_1=a-jc$$

et sachant que l'aire d'un triangle équilatéral de côté a peut être obtenu par : $\mathcal{A}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ et que $z\overline{z}=|z|^2$, calculons la différence :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{\sqrt{3}}{4}\left[(l-n)\overline{(l-n)}-(l_1-n_1)\overline{(l_1-n_1)}\right] \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{1}{(1-j)\overline{(1-j)}}\left\{[(b-a)-j(c-b)]\left[\overline{(b-a)}-j^2\overline{(c-b)}\right]- \right. \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{2j(b-a)\overline{(c-b)}-(c-b)\overline{(b-a)}-2j(c-b)\overline{(b-a)}+(b\right.\end{aligned}$$

en développant et en sachant que $j^2=-1-j.$

Comme $2j=-1+i\sqrt{3}$ il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{4\sqrt{3}}\left\{i\sqrt{3}(b-a)\overline{(c-b)}-i\sqrt{3}(c-b)\overline{(b-a)}\right\} \\ &= \frac{1}{4i}\left\{(c-b)\overline{(b-a)}-(b-a)\overline{(c-b)}\right\}\end{aligned}$$

Le résultat précédent est bien l'aire (algébrique) du triangle dont les affixes des sommets sont *a*, *b* et *c*.

1.4 Notes et références

[1] (en) W. Rutherford, « Question 1439 », *The Ladies Diary*, vol. 122, 1825, p. 47

[2] (de) Fritz Schmidt, « 200 Jahre französische Revolution – Problem und Satz von Napoleon », *Didaktik der Mathematik*, vol. 19, 1990, p. 15-29 (lire en ligne)

[3] (en) John E. Wetzel, « Converses of Napoleon's Theorem », *Amer. Math. Monthly*, vol. 99, 1992, p. 339-351 (lire en ligne) Résumé sur Zentralblatt

[4] (en) Branko Grünbaum, « Is Napoleon's Theorem *Really* Napoleon's Theorem ? », *Amer. Math. Monthly*, vol. 119, n° 6, 2012, p. 495-501 (DOI 10.4169/amer.math.monthly.119.06.495)

[5] (it) Aureliano Faifofer (it), Elementi di geometria, ad uso degli istituti tecnici e dei licei, Venise, Sorteni & Vidotti, 1911, 17e éd.. Le théorème apparaît p.186.

[6] Grünbaum 2012, *op. cit.*. Selon cet auteur, l'identification du théorème par le nom de Napoléon a eu un tel succès au XXe siècle qu'il est devenu vain désormais de chercher à le désigner autrement.

1.5 Voir aussi

1.5.1 Articles connexes

- Problème de Napoléon
- Points de Napoléon
- Point de Fermat
- Théorème de Thébault

1.5.2 Liens externes

- (en) Eric W. Weisstein, « Napoleon's Theorem », *MathWorld*
- Michel Hort, « Le triangle de Napoléon », sur *le-triangle-et-ses-calculs.ch*

- Portail de la géométrie
- Portail du Premier Empire

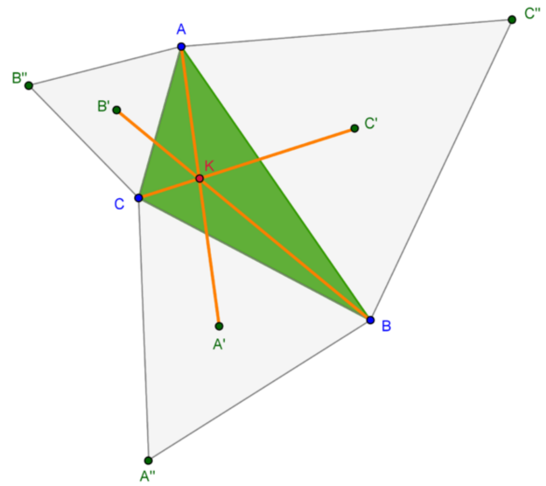
Chapitre 2

Points de Napoléon

En géométrie, les **points de Napoléon** sont deux points remarquables du triangle plan. Leur nom vient de l'Empereur Napoléon Bonaparte, qui les aurait découvert bien que ceci soit remis en question[1]. Ils font partie des éléments remarquables d'un triangle et sont listés aux numéros $X(17)$ et $X(18)$ par Clark Kimberling.

2.1 Définition

2.1.1 Premier point de Napoléon



Construction du premier point de Napoléon

Soit ABC un triangle plan. On construit à partir des côtés BC, CA, AB, les triangles équilatéraux extérieurs $A''BC$, $B''CA$ et $C''AB$ respectivement. On note les centres de gravité de ces triangles A', B' et C' respectivement. Alors $A'A$, $B'B$ et $C'C$ sont concourantes au point noté K, qui est le premier point de Napoléon, ou point de Napoléon extérieur, du triangle ABC.

Le triangle $A'B'C'$ est appelé le triangle de Napoléon extérieur du triangle ABC. Le théorème de Napoléon permet d'affirmer que ce triangle est équilatéral. Le nombre de Kimberling du premier point de Napoléon est $X(17)$[2].

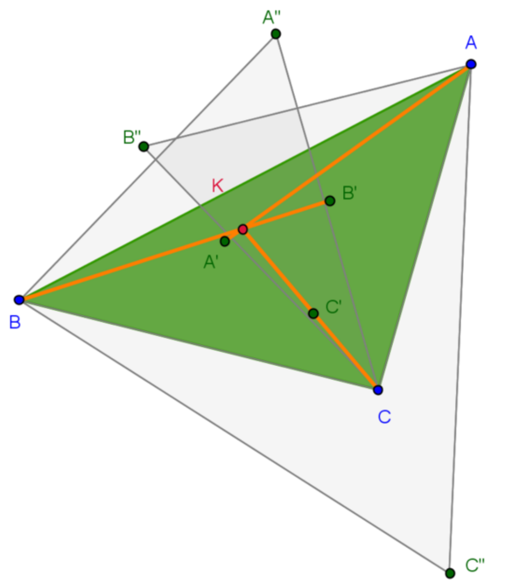
- les coordonnées trilinéaires de K :

$$\left(\csc\left(A+\frac{\pi}{6}\right), \csc\left(B+\frac{\pi}{6}\right), \csc\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$= \left(\sec\left(A-\frac{\pi}{3}\right), \sec\left(B-\frac{\pi}{3}\right), \sec\left(C-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

- les coordonnées barycentriques de K sont :

$$\left(a\csc\left(A+\frac{\pi}{6}\right), b\csc\left(B+\frac{\pi}{6}\right), c\csc\left(C+\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

2.1.2 Second point de Napoléon



Construction du second point de Napoléon

Soit ABC un triangle plan. On construit à partir des côtés BC, CA, AB, les triangles équilatéraux intérieurs $A''BC$, $B''CA$ et $C''AB$ respectivement. On note les centres de gravité de ces triangles A', B' et C' respectivement. Alors $A'A$, $B'B$ et $C'C$ sont concourantes au point noté K, qui est le second point de Napoléon, ou point de Napoléon extérieur, du triangle ABC.

Le triangle $A'B'C'$ est appelé le triangle de Napoléon intérieur du triangle ABC. Le théorème de Napoléon permet d'affirmer que ce triangle est équilatéral. Le nombre de Kimberling du second point de Napoléon est $X(18)$[2].

- les coordonnées trilinéaires de K sont :

$$\left(\csc\left(A-\frac{\pi}{6}\right),\csc\left(B-\frac{\pi}{6}\right),\csc\left(C-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$
$$=\left(\sec\left(A+\frac{\pi}{3}\right),\sec\left(B+\frac{\pi}{3}\right),\sec\left(C+\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

- les coordonnées barycentriques de K sont :

$$\left(a\csc\left(A-\frac{\pi}{6}\right),b\csc\left(B-\frac{\pi}{6}\right),c\csc\left(C-\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

2.2 Relations avec d'autres éléments remarquables

On peut rapprocher les points de Napoléon des points de Fermat-Torricelli ($X(13)$ et $X(14)$). En effet, si au lieu de construire les lignes rejoignant les sommets du triangle aux centres de gravité des triangles équilatéraux extéireurs, on construit les lignes rejoignant les sommets du triangle aux sommets extérieurs de ces triangles équilatéraux, ces trois lignes sont concourantes et ces points d'intersection sont les points de Fermat-Torricelli. L'intersection de la droite de Fermat (qui passe par les deux points de Fermat-Torricelli) et la ligne de Napoléon (qui passe par les deux points de Napoléon) est le point symédian du triangle (de nombre de Kimberling $X(6)$).

2.3 Références

- (en) Cet article est partiellement ou en totalité issu de l'article de Wikipédia en anglais intitulé « Napoleon points » (voir la liste des auteurs).

[1] H. S. M. Coxeter et S. L. Greitzer, Geometry Revisited, Mathematical Association of America, 1967, 61–64 p.

[2] Clark Kimberling, « Encyclopedia of Triangle Centers » (consulté le 2 May 2012)

2.4 Liens externes

- (en) Eric W. Weisstein, « Napoleon Points », *MathWorld*

- Portail de la géométrie

2.5 Sources, contributeurs et licences du texte et de l'image

2.5.1 Texte

- **Théorème de Napoléon** *Source :* http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me%20de%20Napol%C3%A9on?oldid=113709246 *Contributeurs :* BTH, Archeos, Archibald, Ssire, HB, Phe-bot, Papy77, Charles Dyon, Theon, Emeric84, Sherbrooke, Zetud, RobotQuistnix, Tcharvin, Pduceux, IP 84.5, Epsilon0, Milean Creor, Thijs !bot, Rémih, El Caro, Dfeldmann, Eybot, Pdebart, Salebot, DodekBot, WarddrBOT, TXiKiBoT, BenjiBot, Sharayanan, Fabrice Dury, BotMultichill, SieBot, Ambigraphe, JLM, Dhatier, Kelam, DumZiBoT, HerculeBot, ZetudBot, AkhtaBot, Luckas-bot, Anne Bauval, Xqbot, TobeBot, EmausBot, ZéroBot, Woozz, Vagobot, Nicolae-boicu, Addbot et Anonyme : 11
- **Points de Napoléon** *Source :* http://fr.wikipedia.org/wiki/Points%20de%20Napol%C3%A9on?oldid=113710731 *Contributeurs :* Kelam

2.5.2 Images

- **Fichier:Aigle_Empire.svg** *Source :* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/77/Aigle_Empire.svg *Licence :* Public domain *Contributeurs :* Vectorialisation of Aigle_Empire.png *Artiste d'origine :* Frédéric Michel
- **Fichier:Icosahedron.svg** *Source :* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/b/b7/Icosahedron.svg *Licence :* CC-BY-SA-3.0 *Contributeurs :* Vectorisation of Image:Icosahedron.jpg *Artiste d'origine :* User:DTR
- **Fichier:Napoleon'{}s_theorem.svg** *Source :* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/66/Napoleon%27s_theorem.svg *Licence :* CC-BY-SA-3.0 *Contributeurs :* ? *Artiste d'origine :* ?
- **Fichier:Napoleon_first_point.png** *Source :* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/95/Napoleon_first_point.png *Licence :* CC BY-SA 3.0 *Contributeurs :* Travail personnel *Artiste d'origine :* J Hokkanen
- **Fichier:Napoleon_second_point_2.png** *Source :* http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/3/39/Napoleon_second_point_2.png *Licence :* CC BY-SA 3.0 *Contributeurs :* Travail personnel *Artiste d'origine :* J Hokkanen

2.5.3 Licence du contenu

-