Théorème de Napoléon **TS**

Fiche Professeur

Auteur : Raymond Moché

Objet de l'activité : Démontrer par les nombres complexes le théorème de Napoléon, à savoir : « Les centres des triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle quelconque à l'extérieur de celui-ci sont les sommets d'un triangle équilatéral ».

Commentaires :

• Ce problème aurait été posé par Napoléon à Lagrange. Ceci est contesté (cf. [3]).

• [3] contient une solution géométrique et une solution par les complexes de ce problème.

• Cette activité présente une grande analogie avec [2]. Le théorème de Napoléon, comme le théorème de Thébault, est très remarquable. Il établit une propriété du triangle, ce qui paraît plus simple à établir qu'une propriété des parallélogrammes, qui est le sujet du théorème de Thébault.

• Le but du jeu est de faire le moins de calculs possible (voir par exemple les questions **4.b** et **4.c**). Néanmoins, les quelques calculs restants sur des nombres complexes sont plus compliqués que dans le cas du théorème de Thébault.

• Globalement, c'est difficile. Les élèves devraient être étroitement encadrés. Cette activité est plutôt une curiosité pour les professeurs.

Compétences engagées :

✓ $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

✓ Sommes et produits de nombres complexes.

✓ Forme trigonométrique d'un nombre complexe : module, argument, interprétation dans un repère orthonormé direct

✓ Formules d'addition des sinus et des cosinus.

✓ Les médianes d'un triangle sont concourantes.

✓ *Il est admis que* le point de concours M des médianes d'un triangle ABC vérifie

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\cdot\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

✓ Cette propriété se démontre facilement à partir des programmes de géométrie du collège et de la notion de vecteur. Ce n'est pas demandé. On ne parle pas de barycentre.

✓ Affixe d'un point, d'un vecteur.

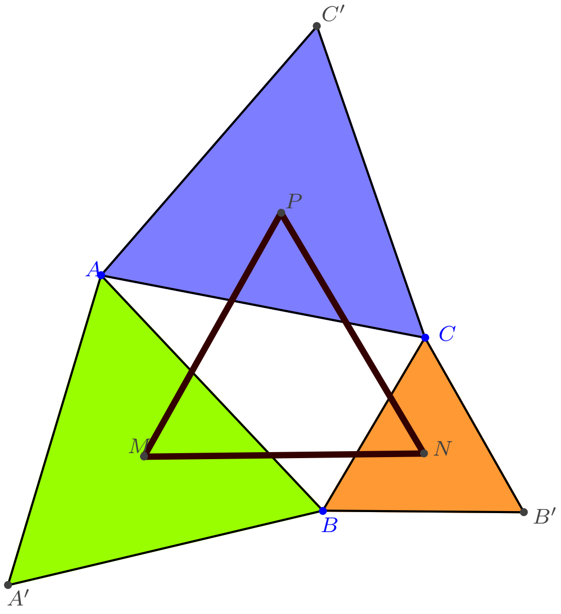
✓ Somme de deux vecteurs.

✓ Connaissance très élémentaire de « GeoGebra »(à la rigueur, le même travail peut être fait avec « scilab » à la place de « GeoGebra » ; utiliser « GeoGebra » est plus agréable).

Matériel utilisé : Ordinateurs équipés de « GeoGebra » (sinon, de « scilab pour les lycées »).

Durée indicative : 1h en salle informatique, préparation à la maison.

Fichiers téléchargeables : Les fiches « Élève et Prof » (fichiers pdf) sont téléchargeables.



Solution :

1 - Comme $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\begin{aligned} v' &= Jv \\ &= \left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \\ &= r\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(\cos\theta+i\sin\theta\right) \\ &= r\left(\cos\theta\cos\frac{\pi}{3}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}+i\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{3}\sin\theta\right)\right) \\ &= r\left(\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right) \end{aligned}$$

Comme $r>0$, c'est la forme trigonométrique de v'. Son module est donc r et un de ses arguments est $\theta+\dfrac{\pi}{3}\cdot$

2.b - On peut évidemment faire la conjecture que MNP est un triangle équilatéral, propriété qui semble résister quand on fait bouger les points A, B ou C, qui sont libres.

3 - D'après la question **1**, le vecteur d'affixe $J\alpha$ a même longueur que le vecteur $\overrightarrow{BA}$ et un argument de $J\alpha$ est un argument de α augmenté de $\dfrac{\pi}{3}\cdot$ Ce vecteur est donc $\overrightarrow{BA'}$, autrement dit, $\alpha'=J\alpha=J\left(a-b\right)$.

4.a -

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA'}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA'}\right)$$

ce qui implique

$$m=\frac{1}{3}\left(a+2b+J\left(a-b\right)\right)=\frac{1+J}{3}\cdot a+\frac{2-J}{3}\cdot b$$

4.b & c - n s'obtient à partir de m par permutation circulaire des paramètres a, b et c. De même pour p, ce qui donne .

$$n=\frac{1+J}{3}\cdot b+\frac{2-J}{3}\cdot c \quad \text{et} \quad p=\frac{1+J}{3}\cdot c+\frac{2-J}{3}\cdot a$$

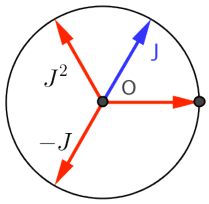
5.a - L'affixe de x de $\overrightarrow{MN}$ est donc

$$x = n - m = -\frac{1+J}{3}\cdot a - \frac{1-2J}{3}\cdot b + \frac{2-J}{3}\cdot c$$

L'affixe de $\overrightarrow{PM}$ se déduit de l'affixe de $\overrightarrow{MN}$ par deux permutations circulaires successives, ce qui change a, b et c en c, a et b. Par changement de signe, on obtient ensuite y :

$$y = \frac{1-2J}{3}\cdot a - \frac{2-J}{3}\cdot b + \frac{1+J}{3}\cdot c$$

5.b - L'égalité $1 - J + J^2 = 0$ se lit sur le cercle trigonométrique (somme des vecteurs rouges) :



Tous calculs faits, on obtient :

$$y - Jx = \left(\frac{1-J+J^2}{3}\right)(a - 2\cdot b + c) = 0$$

5.c - Comme on l'a déjà vu dans un cas analogue, l'égalité $y = Jx$ prouve que les côtés $[MN]$ et $[MP]$ du triangle MNP ont même longueur et que l'angle des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ vaut $\frac{\pi}{3}\cdot$ MNP est donc équilatéral.

On peut donc énoncer le théorème suivant, dit théorème de Napoléon : « *Les centres des triangles équilatéraux construits sur les côtés d'un triangle quelconque à l'extérieur de celui-ci sont les sommets d'un triangle équilatéral* ».

Références

[1] *Théorème de Thébault*, activité pour la classe de Première S
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/Premiere_Geometrie1.htm`

[2] *Théorème de Thébault*, activité pour la classe de TS
`http://gradus-ad-mathematicam.fr/TSGeometrie2.htm`

[3] Wikipedia : *Théorème de Napoléon*
`http://fr.wikipedia.org/wiki/Theoreme_de_Napoleon`