Théorème de Napoléon

Jean-François Burnol, 29 novembre 2010

On part d'un triangle ABC. On construit les triangles équilatéraux BPC, CQA, ARB et soient G, H, I leurs centres. Alors le triangle GHI est lui aussi équilatéral :

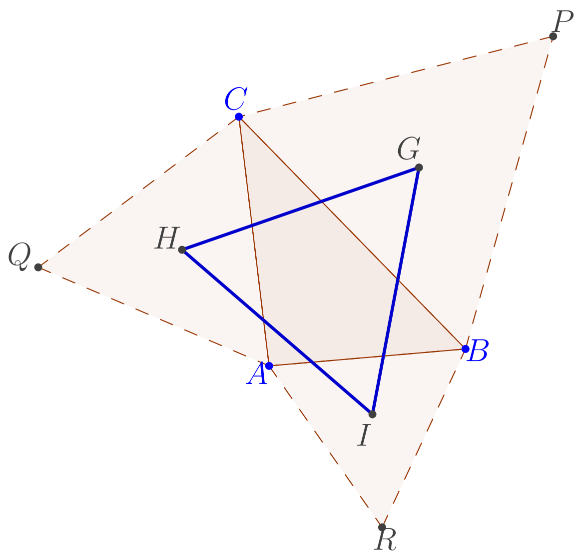

Figure 1 – Théorème de Napoléon

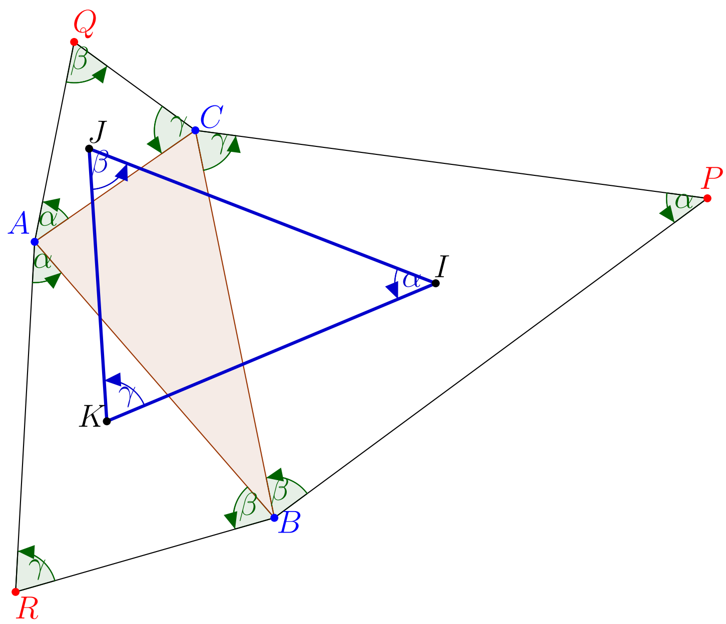

Figure 2 – Théorème de Napoléon Général

Pour la preuve on construit le point K, intersection commune aux trois cercles circonscrits aux triangles équilatéraux (si K est l'intersection de (A,C,Q) et de (A,B,R) autre que A, par cocyclicité l'angle de droite (KB,KA) vaut $(RB,RA)=\frac{\pi}{3}$, l'angle de droite (KA,KC) vaut $(QA,QC)=\frac{\pi}{3}$ donc (KC,KB) vaut aussi $-2\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, et K est aussi cocyclique avec B,C,P). Ensuite on remarque avec les notations de la figure que $2\delta+2\eta$ vaut $\frac{2\pi}{3}$.

Dans le cas de la figure K est à l'interieur du triangle ABC et les trois angles (de mesure modulo 2π contrairement aux angles de droites) $\widehat{AKB}, \widehat{BKC}, \widehat{CKA}$ valent $\frac{2\pi}{3}$, mais il est à l'extérieur si l'un des angles de ABC excède $\frac{2\pi}{3}$, et alors l'un des angles vaut $\frac{2\pi}{3}$ et les deux autres $-\frac{\pi}{3}$.

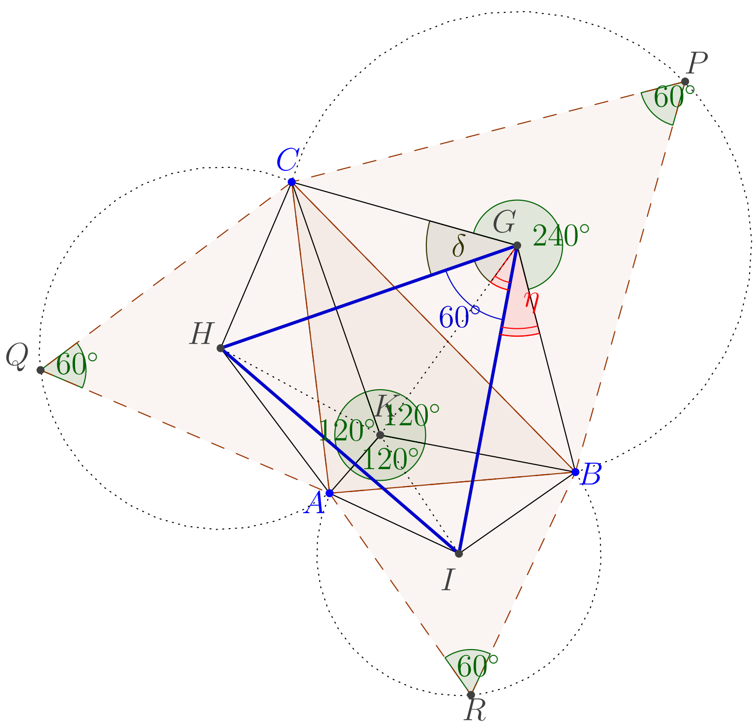

Figure 3 – Preuve du Théorème de Napoléon

Dans la version plus générale, on part d'un triangle ABC et d'un point P, formant un triangle BPC dont on note β, α, γ les angles aux sommets. On considère la similitude directe de centre C qui envoie P sur A, ce qui crée un nouveau point Q comme image de B, puis la similitude de centre A qui envoie Q sur B ce qui crée un point R comme image de C. Ainsi on a trois triangles semblables adjacents au triangle d'origine. On note I, J, K les centres des cercles circonscrits à ces trois triangles, et le Théorème dit que IJK est semblable aux trois autres triangles (par une similitude indirecte). La preuve utilise le point M, intersection commune des trois cercles comme indiqué sur la figure ci-dessous.

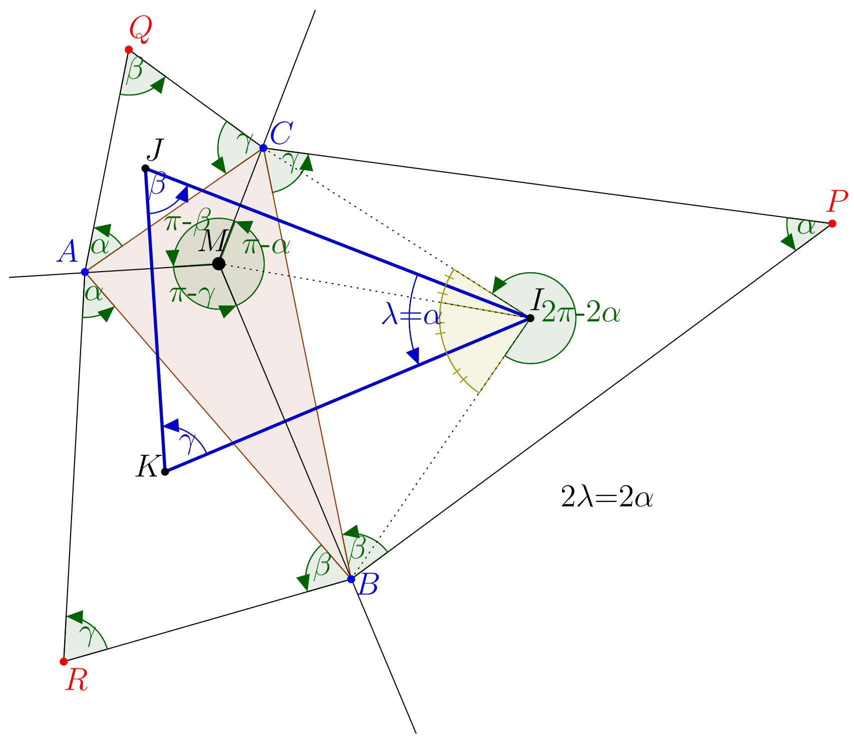

Figure 4 – Preuve du Théorème de Napoléon Général